2 RS 36113

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, DECEMBER 2023/JANUARY 2024.

THIRD SEMESTER

Mathematics

Paper III – ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE question. Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Show that a group G is abelian iff $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \forall a, b \in G$.

   G ఎబిలియన్ సమూహం అయితే $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \forall a, b \in G$ ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని నిరూపించండి.

2. Show that the Cube roots of unity is an abelian group with respect to multiplication.

   ఐక్యత యొక్క క్యూబ్ మూలాలు గుణకారానికి సంబంధించి ఎబిలియన్ సమూహం అని చూపించండి.

3. If H_1 and H_2 are two sub groups of a group G then $H_1 \cap H_2$ is also a sub group.

   H_1 మరియు H_2 ఒక సమూహం G యొక్క రెండు ఉప సమూహాలు అయితే $H_1 \cap H_2$ కూడా ఒక ఉప సమూహం.

4. If H is any subgroup of a group $(G, *)$ and $h \varepsilon G$. Then prove that $h \varepsilon G$ iff $hH = H = Hh$.

   సమూహం $(G, *)$ లో H ఏదైనా ఉప సమూహం మరియు $h \varepsilon G$. అయితే $h \varepsilon G \Rightarrow hH = H = Hh$ అని నిరూపించండి.

5. Show that every sub group of an abelian group is normal.

   ఎబిలియన్ సమూహంలోని ప్రతి ఉప సమూహం అభిలంబ ఉప సమూహం చూపండి.

6. Prove that every quotient group of an abelian group is abelian.

   వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి వ్యుత్పన్న సమూహము వినిమయం అని నిరూపించండి.

7. If f is a homomorphism of a group G into a group G' then the Kernel of f is a normal sub group of G.

   G నుండి G' f అనేది సమరూప అయితే, f యొక్క కెర్నల్ ఒక అభిలంబ ఉప సమూహం అని నిరూపించండి.

8. Prove that homomorphic image of a group is a group.

సమూహం యొక్క సమరూపక ప్రతిబింబ కూడా సమూహం అని నిరూపించండి.

9. Show that a division ring has no zero devisors.

విభాగ వలయంకు శూన్యభాజకాలు లేవు అని చూపండి.

10. Prove that every field is an Integral Domain.

ప్రతి క్షేత్రము ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం అని నిరూపించండి.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL questions. Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. A finite semigroup G satisfying cancellation laws is a group.

G అనే పరిమిత అర్ధసమూహం కొట్టివేత న్యాయాలను తృప్తి పరుస్తుందని చూపండి.

Or

12. If "*" is defined on Z, as $a * b = a + b + 2 \forall a, b \in Z$ then show that $(Z, *)$ is an abelian group.

Z ద్వారా నిర్వచించబడిన "*" $a * b = a + b + 2 \forall a, b \in Z$ అయితే $(Z, *)$ ఎబిలియన్ సమూహాన్ని ఏర్పరుస్తుందని చూపండి.

13. Prove that the union of two subgroups of a group G is a subgroup iff one is contained in another.

సమూహం G యొక్క రెండు ఉప సమూహాల సమ్మేళనం ఉప సమూహం అగటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఒకటి వరొక ఉప సమూహానికి ఉపసమితి అని నిరూపించండి.

Or

14. Prove that any two left (right) cosets of a sub group are either identical or disjoint.

ఉప సమూహం యొక్క ఏవైనా రెండు ఎడమ (కుడి) సహసమితులు వియుక్తాలు లేదా సమానం అని నిరూపించండి.

15. If M, N are two normal subgroup of G such that $M \cap N = \{e\}$ then show that every element of M commutes with every element of N.

M, N అనేది G యొక్క రెండు అభిలంబ ఉప సమూహం $M \cap N = \{e\}$ అయితే, M యొక్క ప్రతి మూలకం N యొక్క ప్రతి మూలకంతో ప్రయాణిస్తుందని చూపిస్తుంది.

Or

16. If H is normal subgroup of group G then prove that the set G/H of all cosets of H in G with respect to cosets multiplication is a group.

G లో H ఒక అభిలంబ ఉప సమూహం అయితే, సహసమితుల గుణకారానికి సంబంధించి G లోని H యొక్క అన్ని సహసమితులు G/H సమితి ఒక సమూహం అని నిరూపించండి.

17. State and prove Fundamental theorem of Homomorphism of groups.

సమూహాల సమరూపత యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

18. The necessary and sufficient condition for a homomorphism f from a group G onto a group G' with kernel K to be an isomorphism of G into G' is that $K = \{e\}$.

కెర్నల్ K తో సమూహ G నుండి G' ఒక సమూహానికి f ఒక సమరూపత G నుండి G' అయితే $K = \{e\}$ ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం అని చూపండి.

19. Prove that every finite integral domain is a field.

ఒక పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశం క్షేత్రం అవుతుంది అని చూపండి.

Or

20. State and prove cancellation laws on rings.

వలయంలో కొట్టివేత న్యాయాలను ప్రవచించి నిరూపించండి.

---

2 RS 36113